(13)

UNA PROPOSIZIONE

SUI

TETRAEDRI CONIUGATI

DI UNA QUADRICA

NOTA

DEL

Prof. GIUSEPPE BRUNO

TORINO
TIP. E LIT. CAMILLA E BERTOLERO
Via Ospedale, N. 18
1877.

UNA PROPOSIZIONE

SUI

TETRAEDRI CONIUGATI

DI UNA QUADRICA

NOTA

DEL

Prof. GIUSEPPE BRUNO

TORINO
TIP. E LIT. CAMILLA E BERTOLERO
Via Ospedale, N. 18
1877.

Una quadrica q riferita a tre assi di coordinate ortogonali x, y, z sia rappresentata dall'equazione

$$\left.\begin{array}{l} A_x x^2 + A_y y^2 + A_z z^2 + 2 B_x y z + 2 B_y x z + 2 B_z x y \\ \quad + 2 C_x x + 2 C_y y + 2 C_z z + D = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Se p', p'', p''', p^{IV} sono le distanze di un punto M della q dalle facce di un dato tetraedro T conjugato di questa superficie, e P', P'', P''', P^{IV} sono quattro costanti di valor conveniente, si ha, qualunque sia la posizione del punto M sulla quadrica, la relazione

$$P' p'^2 + P'' p''^2 + P''' p'''^2 + P^{IV} p^{IV^2} = 0 \ldots\ldots (2).$$

D'altronde dette x, y, z le coordinate di M;
r il raggio di una delle sfere tangenti alle quattro faccie di T;
u, v, w le coordinate del centro di questa sfera;

$$\alpha'_x, \alpha'_y, \alpha'_z;\ \alpha''_x, \alpha''_y, \alpha''_z;\ \alpha'''_x, \alpha'''_y, \alpha'''_z;\ \alpha_x^{IV}, \alpha_y^{IV}, \alpha_z^{IV}$$

gli angoli che i raggi della detta sfera condotti ai punti di suo contatto colle facce di T fanno cogli assi coordinati, e posto per brevità

$$\left.\begin{array}{l}
u\cos\alpha'_x \;+v\cos\alpha'_y \;+w\cos\alpha'_z \;-r=\mathrm{H}' \\
u\cos\alpha''_x+v\cos\alpha''_y+w\cos\alpha''_z-r=\mathrm{H}'' \\
u\cos\alpha'''_x+v\cos\alpha'''_y+w\cos\alpha'''_z-r=\mathrm{H}''' \\
u\cos\alpha_x^{\mathrm{IV}}+v\cos\alpha_y\;+w\cos\alpha_z^{\mathrm{IV}}-r=\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}
\end{array}\right\}\ldots\ldots (3),$$

è

$$\begin{array}{l}
p' \;=x\cos\alpha'_x \;+y\cos\alpha'_y \;+z\cos\alpha'_z \;-\mathrm{H}' \\
p'' \;=x\cos\alpha''_x+y\cos\alpha''_y+z\cos\alpha''_z-\mathrm{H}'' \\
p'''=x\cos\alpha'''_x+y\cos\alpha'''_y+z\cos\alpha'''_z-\mathrm{H}''' \\
p^{\mathrm{IV}}=x\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_x+y\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_y+z\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_z-\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}.
\end{array}$$

Il risultato della sostituzione di questi valori di p', p'', p''', p^{IV} nella (2) deve essere un'equazione identica alla (1), ossia devono verificarsi le dieci equazioni di condizione

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{P}'\cos^2\alpha'_x+\mathrm{P}''\cos^2\alpha''_x+\mathrm{P}'''\cos^2\alpha'''_x+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos^2\alpha^{\mathrm{IV}}_x=\mathrm{A}_x \\
\mathrm{P}'\cos^2\alpha'_y+\mathrm{P}''\cos^2\alpha''_y+\mathrm{P}'''\cos^2\alpha'''_y+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos^2\alpha^{\mathrm{IV}}_y=\mathrm{A}_y \\
\mathrm{P}'\cos^2\alpha'_z+\mathrm{P}''\cos^2\alpha''_z+\mathrm{P}'''\cos^2\alpha'''_z+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos^2\alpha^{\mathrm{IV}}_z=\mathrm{A}_z \\
\mathrm{P}'\cos\alpha'_y\cos\alpha'_z+\mathrm{P}''\cos\alpha''_y\cos\alpha''_z+\mathrm{P}'''\cos\alpha'''_y\cos\alpha'''_z \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_y\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_z=\mathrm{B}_x \\
\mathrm{P}'\cos\alpha'_z\cos\alpha'_x+\mathrm{P}''\cos\alpha''_z\cos\alpha''_x+\mathrm{P}'''\cos\alpha'''_z\cos\alpha'''_x \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_z\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_x=\mathrm{B}_y \\
\mathrm{P}'\cos\alpha'_x\cos\alpha'_y+\mathrm{P}''\cos\alpha''_x\cos\alpha''_y+\mathrm{P}'''\cos\alpha_x'''\cos\alpha'''_y \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_x\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_y=\mathrm{B}_z
\end{array}\right\}\ldots (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{P}'\mathrm{H}'\cos\alpha'_x+\mathrm{P}''\mathrm{H}''\cos\alpha''_x+\mathrm{P}'''\mathrm{H}'''\cos\alpha'''_x \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_x=-\mathrm{C}_x \\
\mathrm{P}'\mathrm{H}'\cos\alpha'_y+\mathrm{P}''\mathrm{H}''\cos\alpha''_y+\mathrm{P}'''\mathrm{H}'''\cos\alpha'''_y \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_y=-\mathrm{C}_y \\
\mathrm{P}'\mathrm{H}'\cos\alpha'_z+\mathrm{P}''\mathrm{H}''\cos\alpha''_z+\mathrm{P}'''\mathrm{H}'''\cos\alpha'''_z \\
\qquad+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\mathrm{H}^{\mathrm{IV}}\cos\alpha^{\mathrm{IV}}_z=-\mathrm{C}_z
\end{array}\right\}\ldots\ldots (5)$$

$$P'H'^2+P''H''^2+P'''H'''^2+P^{IV}H^{IV\,2}=D \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Posto nelle (5) e nella (6) per H′, H″, H‴, H^{IV} le loro espressioni (3), e tenuto conto delle (4), quelle equazioni si riducono alle:

$$\left.\begin{array}{c}
A_x u+B_z v+B_y w \\
-r(P'\cos\alpha'_x+P''\cos\alpha''_x+P'''\cos\alpha'''_x+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_x)=-C_x \\
B_z u+A_y v+B_x w \\
-r(P'\cos\alpha'_y+P''\cos\alpha''_y+P'''\cos\alpha'''_y+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_y)=-C_y \\
B_y u+B_x v+A_z w \\
-r(P'\cos\alpha'_z+P''\cos\alpha''_z+P'''\cos\alpha'''_z+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_z)=-C_z
\end{array}\right\}(5')$$

$$\begin{array}{c}
A_x u^2+A_y v^2+A_z w^2+2B_x vw+2B_y uw+2B_z uv \\
-2ru(P'\cos\alpha'_x+P''\cos\alpha''_x+P'''\cos\alpha'''_x+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_x) \\
-2rv(P'\cos\alpha'_y+P''\cos\alpha''_y+P'''\cos\alpha'''_y+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_y) \\
-2rw(P'\cos\alpha'_z+P''\cos\alpha''_z+P'''\cos\alpha'''_z+P^{IV}\cos\alpha^{IV}_z) \\
+r^2(P'+P''+P'''+P^{IV})-D=0,
\end{array}$$

e quest'ultima, in virtù delle tre prime equazioni (4) e delle (5′) può scriversi così:

$$A_x u^2+A_y v^2+A_z w^2+2B_x vw+2B_y uw+2B_z uv+2C_x u+2C_y v$$
$$+2C_z w+D-r^2(A_x+A_y+A_z)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6').$$

L'equazione (6′) ora ottenuta racchiude il teorema che ci eravamo proposto di dimostrare: esso può enunciarsi come segue: « I centri di tutte le sfere che hanno il loro raggio di una stessa » grandezza data qualunque r, e delle quali ognuna è iscritta od » exiscritta in uno dei tetraedi conjugati di una quadrica data q, » giacciono sopra una stessa quadrica Q omotetica e concen» trica a q ».

Dall'equazione (6′) risultano ancora i corollari seguenti:

1° Se si abbia una serie di quadriche q, Q_1, Q_2,... Q_{i-n},... Q_{i-1}, Q_i,... omotetiche e concentriche fra loro, delle quali una

qualunque Q_i sia il luogo dei centri delle sfere di raggio dato r_i iscritte od exiscritte in tetraedri conjugati della quadrica immediatamente precedente Q_{i-1}, essa Q_i sarà pure il luogo dei centri delle sfere iscritte od exiscritte in tetraedri conjugati di un'altra qualunque Q_{i-n} delle quadriche precedenti, il raggio comune R delle quali sia determinato dall'equazione

$$R^2 = r_i^2 + r_{i-1}^2 + \dots + r^2_{i-n+1}.$$

2° Se un tetraedro ha due o più faccie di area equivalente ed è conjugato di una quadrica q, i centri delle differenti sfere exiscritte ad esso che toccano esternamente una di dette faccie sono punti di una stessa quadrica omotetica e concentrica a q.

Vi hanno tetraedri, oltre i regolari, le cui quattro faccie sono equivalenti, e pei quali perciò i centri delle quattro sfere exiscritte godono della proprietà accennata.

Per costrurre uno di tali tetraedri del quale sia data una faccia ABC, si cerchi il centro O del circolo circoscritto a tal faccia, ed il punto I d'incontro delle sue tre altezze. Sulla congiungente questi due punti si prenda il punto H tale che sia $HO = OI$, e sulla normale in H al piano di essa faccia si prenda il punto D in modo che il triangolo, che ha per base un lato qualunque AB della medesima ed il vertice opposto in D, sia equivalente al triangolo ABC; il tetraedro ABCD soddisferà alla condizione voluta.

3° Quando la superficie Q è un iperboloide, del quale i quadrati algebrici a^2, b^2, c^2 dei semiassi soddisfano alla condizione

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0,$$

ossia quando si ha $A_x + A_y + A_z = 0$, la superficie Q coincide colla q. Dunque sopra una superficie di tal natura giacciono i centri della sfera iscritta, e di ciascuna delle quattro sfere exiscritte in un tetraedro qualunque conjugato di essa superficie.

Suppongasi che questo tetraedro sia regolare e faccia un mezzo giro attorno ad una retta parallela ad un suo spigolo e passante pel suo centro; i quattro vertici del medesimo vengono così a prendere la posizione dei centri delle quattro sfere exiscritte al

tetraedro nella sua posizione primitiva, epperciò esso viene ad essere iscritto nella quadrica. Ne segue che un iperboloide, i cui assi soddisfanno alla condizione sopraindicata, ed è circoscritto ad un tetraedro regolare, passa pure pel centro di questo tetraedro; e viceversa, se una quadrica a centro passa pel centro di un tetraedro regolare iscritto nella medesima, essa è un iperboloide, e fra i suoi assi si verifica la relazione soprariferita.

Avvenendo che la superficie q sia un paraboloide, la Q è un paraboloide identico a q ed avente con esso comuni i piani principali: hanno pur luogo allora le proposizioni dei corollari 1° e 2°, e quando il paraboloide q sia iperbolico equilatero anche quelle del corollario 3°.